Examen final du 12 décembre 2016 (1ère session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. Dans tout l'examen on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires géométriques indépendantes de paramètres respectifs $a > 0$ et $b > 0$, c'est-à-dire que pour tout $k \geq 1$

$$P(X = k) = (1-a)a^{k-1} \qquad \text{et} \qquad P(Y = k) = (1-b)b^{k-1}.$$

a) Calculer $P(X = Y)$.

b) Donner la loi de X conditionnellement à $\{X = Y\}$, c'est-à-dire calculer $P(X = k | X = Y)$ pour tout $k \geq 1$.

c) Calculer $P(X \leq Y)$.

d) Donner la loi de X conditionnellement à $\{X \leq Y\}$.

Solution de l'exercice 1.

a) D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(X = Y) &= \sum_{k \geq 1} P(X = Y = k) \\
&= \sum_{k \geq 1} P(X = k)\, P(Y = k) = \sum_{k \geq 1} (1-a)a^{k-1}(1-b)b^{k-1} \\
&= (1-a)\,(1-b) \sum_{k \geq 1} (ab)^{k-1} = \frac{(1-a)\,(1-b)}{1-ab}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
P(X = k | X = Y) &= \frac{P(X = Y = k)}{P(X = Y)} \\
&= \frac{1-ab}{(1-a)\,(1-b)} P(X = k)\, P(Y = k) = \frac{1-ab}{(1-a)\,(1-b)} (1-a)a^{k-1}(1-b)b^{k-1} \\
&= (1-ab)\,(ab)^{k-1},
\end{aligned}$$

de sorte que conditionnellement à $X = Y$, X suit la loi géométrique de paramètre ab.

c) D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(X \le Y) &= \sum_{k\ge 1} P(X = k \le Y) \\
&= \sum_{k\ge 1} P(X = k)\, P(Y \ge k) = \sum_{k\ge 1} (1-a)a^{k-1}b^{k-1} \\
&= (1-a) \sum_{k\ge 1} (ab)^{k-1} = \frac{(1-a)}{1-ab}
\end{aligned}$$

d) Pour tout $k \ge 1$

$$\begin{aligned}
P(X = k | X \le Y) &= \frac{P(X = k \le Y)}{P(X = Y)} \\
&= \frac{1-ab}{1-a}\, P(X = k)\, P(Y \ge k) = \frac{1-ab}{1-a}\,(1-a)a^{k-1}b^{k-1} \\
&= (1-ab)\,(ab)^{k-1},
\end{aligned}$$

de sorte que conditionnellement à $X \le Y$, X suit à nouveau la loi géométrique de paramètre ab.

Exercice 2. Soit une suite (X_n) de variables aléatoires de carré intégrable, telle que $\lim_{n\to\infty} E(X_n) = c$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$.

a) Montrer que
$$E\left[(X_n - c)^2\right] = \mathrm{Var}(X_n) + \left[E(X_n - c)\right]^2.$$

b) En déduire que (X_n) converge vers c dans L^2.

c) Montrer que (X_n) converge vers c en probabilité.

Solution de l'exercice 2.

a) L'égalité demandée découle du fait que $\mathrm{Var}(X_n - c) = \mathrm{Var}(X_n)$. Mais on peut aussi la démontrer en développant le carré $(X_n - c)^2$ et en utilisant la linéarité de l'espérance.

b) Comme $\lim_n E(X_n - c) = 0$, on a bien sûr que $\lim_n \left[E(X_n - c)\right]^2 = 0$. De plus par hypothèse, $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$, donc $E\left[(X_n - c)^2\right] \to 0$, ce qui est la définition de la convergence dans L^2 vers c.

c) D'après le cours, la convergence dans L^2 implique la convergence en probabilité, mais il est demandé de le démontrer. Comme dans le cours, on peut utiliser l'inégalité de Markov
$$P(|X_n - c| > \varepsilon) = P\left((X_n - c)^2 > \varepsilon^2\right) \le \frac{E\left[(X_n - c)^2\right]}{\varepsilon^2},$$
qui tend vers 0 d'après la question précédente.

Dans les deux exercices suivants, on modélise le réseau des amitiés d'un groupe de n étudiants appelés $A_1, \dots, A_n$ de la manière suivante. Pour tous $i \ne j$, on définit l'évènement

$$B_{ij} := \{\text{Les étudiants } A_i \text{ et } A_j \text{ se connaissent}\}.$$

On se donne $p_n \in]0,1[$, et on suppose que pour tous $i \neq j$, $P(B_{ij}) = p_n$. On suppose que les évènements B_{ij} sont indépendants et que $\lim_{n\to\infty} n\, p_n = a > 0$.

Exercice 3. Soit X_n le nombre de paires d'étudiants qui se connaissent.

a) Rappeler le nombre total de paires distinctes d'étudiants.

b) Montrer que X_n est une variable binomiale dont on précisera les paramètres.

c) Déterminer l'espérance de X_n, sa variance et sa fonction génératrice.

d) Déduire des résultats de l'exercice 2 la convergence de X_n/n dans un sens que l'on précisera et déterminer sa limite.

Solution de l'exercice 3.

a) Ce nombre vaut bien sûr $n(n-1)/2$.

b) On peut écrire $X_n = \sum_{i<j} \mathbb{1}_{B_{ij}}$, donc par indépendance des évènements B_{ij}, X_n est une variable binomiale de paramètres p_n et $n(n-1)/2$.

c) On a donc $E(X_n) = n(n-1)p_n/2$, $\mathrm{Var}(X_n) = n(n-1)p_n(1-p_n)/2$ et

$$f_n(s) := E\left(s^{X_n}\right) = (1 - p_n + p_n s)^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad s \in [0,1].$$

d) On a $E(X_n/n) = (n-1)p_n/2 \to a/2$ et $\mathrm{Var}(X_n/n) = \mathrm{Var}(X_n)/n^2 = (n-1)p_n(1-p_n)/(2n) \to 0$. D'après l'exercice 2, la suite (X_n/n) converge dans L^2 (et donc en probabilité) vers $a/2$.

Exercice 4. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit l'évènement $B_i := \{A_i \text{ ne connaît aucun autre étudiant}\}$. Soit Y_n le nombre d'étudiants qui ne connaissent aucun autre étudiant.

a) Montrer que $B_i = \bigcap_{j\neq i} {}^c B_{ij}$ et que $Y_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ où $\varepsilon_i := \mathbb{1}_{B_i}$.

b) Calcul de l'espérance de Y_n.

  i) Calculer $E(\varepsilon_1)$.

  ii) Calculer $E(Y_n)$.

c) Calcul du moment d'ordre 2 de Y_n.

  i) Calculer $E(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$.

  ii) Montrer que
$$E\left(Y_n^2\right) = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}.$$

d) Convergence de Y_n/n.

  i) Montrer la convergence de $E(Y_n/n)$.

  ii) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Y_n/n) = 0$.

  iii) Déduire des résultats de l'exercice 2 la convergence de Y_n/n dans un sens que l'on précisera et déterminer sa limite.

Solution de l'exercice 4.

a) Pour tout i on a

$$\begin{aligned} B_i &= \{\text{les étudiants } A_i \text{ et } A_j \text{ ne se connaissent pas } \forall j \neq i\} \\ &= \bigcap_{j\neq i} \{\text{les étudiants } A_i \text{ et } A_j \text{ ne se connaissent pas}\} = \bigcap_{j \neq i} {}^c B_{ij} \end{aligned}$$

et bien sûr $Y_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{B_i}$ est le nombre de i tels que B_i est réalisé, c'est-à-dire le nombre de i tels que A_i ne connaît personne.

b) Calcul de l'espérance de Y_n.

i) $E(\varepsilon_1) = P(B_1) = P\left(\bigcap_{j=2}^n {}^c B_{1j}\right) = [P({}^c B_{12})]^{n-1} = (1-p_n)^{n-1}$.

ii) On utilise l'écriture de Y_n donnée précédemment et la linéarité de l'espérance

$$E(Y_n) = \sum_{i=1}^n E(\varepsilon_i) = nE(\varepsilon_1) = n(1-p_n)^{n-1}.$$

c) Calcul de la variance de Y_n.

i) $E(\varepsilon_1\varepsilon_2) = P(B_1 \cap B_2) = P\left({}^c B_{12} \cap \bigcap_{i=3}^n {}^c B_{1i} \cap \bigcap_{j=3}^n {}^c B_{2j}\right) = (1-p_n)(1-p_n)^{n-2}(1-p_n)^{n-2} = (1-p_n)^{2n-3}$.

ii) On utilise à nouveau l'écriture de Y_n

$$\begin{aligned} E\left(Y_n^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sum_{j=1}^n \varepsilon_j\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2\right) + E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} \varepsilon_i\varepsilon_j\right) = nE\left(\varepsilon_1^2\right) + n(n-1)E(\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}. \end{aligned}$$

d) Convergence de Y_n/n

i) $E(Y_n)/n = (1-p_n)^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1-p_n)} = e^{(n-1)(-p_n+o(p_n))} \to e^{-a}$.

ii) On a déjà utilisé le fait que $\mathrm{Var}(Y_n/n) = \mathrm{Var}(Y_n)/n^2$, et

$$\mathrm{Var}(Y_n) = E\left(Y_n^2\right) - [E(Y_n)]^2 = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3} - n^2(1-p_n)^{2n-2},$$

on a donc

$$\mathrm{Var}(Y_n/n) = \frac{1}{n}(1-p_n)^{n-1} + \frac{n-1}{n}(1-p_n)^{2n-3} - (1-p_n)^{2n-2}.$$

Il est facile de voir que chacun des termes du membre de droite de l'équation précédente a une limite lorsque $n \to \infty$, et que ces limites valent 0, e^{-2a} et $-e^{-2a}$, d'où la convergence de $\mathrm{Var}(Y_n/n)$ vers 0.

iii) D'après l'exercice 2, la suite (Y_n/n) converge dans L^2 (et donc en probabilité) vers e^{-a}.