Examen final du 9 juin 2016 (2ème session)

Durée : 2 heures. Tous documents interdits. Dans tout l'examen on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. La qualité et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. On admettra dans cet exercice que l'on peut intervertir sommation et intégrale lorsque l'intégrand est de signe constant. On rappelle que $\int_0^\infty y^k e^{-y} dy = k!$.
Soit $\rho > 0$. On définit la loi du vecteur aléatoire (X, Y) élément de $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{R}_+$ par

$$P(X = k, Y \in [a, b]) = c\,\frac{\rho^k}{k!} \int_a^b y^{k-1}\, e^{-(\rho+1)y}\, dy \qquad k \geq 1, 0 \leq a \leq b,$$

où $c > 0$ est une constante qui sera déterminée dans la question suivante.

a) i) Montrer que

$$P(X = k) = c\,\frac{q^k}{k} \qquad k \geq 1,$$

où $q \in]0, 1[$ sera exprimé à l'aide de ρ. En déduire c.

ii) Montrer que Y admet la densité f donnée par

$$f(y) = c\,e^{-y}\frac{1 - e^{-\rho y}}{y} \qquad y > 0.$$

b) i) Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

ii) Justifier la formule

$$E(XY) = c \sum_{k \geq 1} \int_0^\infty ky\,\frac{\rho^k}{k!}\, y^{k-1}\, e^{-(\rho+1)y}\, dy.$$

iii) Calculer $E(XY)$ en utilisant la formule précédente et en déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Quel est le signe de cette covariance ?

Solution de l'exercice 1.

a) i) Par la formule des probabilités totales, puis par le changement de variable $u = (\rho + 1)y$,

$$P(X = k) = c\,\frac{\rho^k}{k!} \int_0^\infty y^{k-1}\, e^{-(\rho+1)y}\, dy = c\,\frac{\rho^k}{k!}\,(\rho + 1)^{-k} \int_0^\infty u^{k-1}\, e^{-u}\, dy = c\,\frac{q^k}{k},$$

où $q = \rho/(\rho + 1)$. De plus,

$$1 = c \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{k} = -c\, \ln(1 - q) = c \ln(\rho + 1),$$

d'où $c = 1/\ln(\rho + 1)$.

ii) Par la formule des probabilités totales à nouveau,

$$P(Y \in [a,b]) = c \sum_{k\geq 1} \frac{\rho^k}{k!} \int_a^b y^{k-1}\, e^{-(\rho+1)y}\, dy \qquad 0 \leq a \leq b.$$

En admettant qu'on peut intervertir intégrale et somme,

$$P(Y \in [a,b]) = c \int_a^b y^{-1} \left(\sum_{k\geq 1} \frac{(\rho y)^k}{k!} \right) e^{-(\rho+1)y}\, dy = c \int_a^b y^{-1} \left(e^{\rho y} - 1\right) e^{-(\rho+1)y}\, dy,$$

d'où le résultat.

b) i) Tout d'abord,

$$E(X) = c \sum_{k\geq 1} kP(X=k) = c \sum_{k\geq 1} q^k = \frac{cq}{1-q} = c\rho.$$

Ensuite,

$$E(Y) = \int_0^\infty y f(y)\, dy = c \int_0^\infty e^{-y} \left(1 - e^{-\rho y}\right) dy = c \left(1 - \frac{1}{1+\rho}\right) = \frac{c\rho}{1+\rho} = cq.$$

ii) On a écrit

$$E(XY) = \sum_{k\geq 1} \int_0^\infty k\, y\, P(X=k, Y \in dy),$$

c'est-à -dire que l'on pondère toutes les valeurs possibles de XY par leur 'probabilité', que l'on 'somme' ensuite.

iii)

$$\begin{aligned} E(XY) = c \sum_{k\geq 1} \int_0^\infty ky \frac{\rho^k}{k!} y^{k-1}\, e^{-(\rho+1)y}\, dy \\ = c \int_0^\infty \left(\sum_{k\geq 1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} y^k \right) e^{-(\rho+1)y}\, dy \\ = c \int_0^\infty \left(\rho y e^{\rho y}\right) e^{-(\rho+1)y}\, dy = c\rho \int_0^\infty y e^{-y}\, dy = c\rho. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\, E(Y) = c\rho - (c\rho)(cq) = c\rho(1-cq) = c\rho \left(1 - \frac{q}{-\ln(1-q)}\right)$$

qui est toujours positive par l'inégalité $-\ln(1-q) \geq q$.

Exercice 2. Une femme a dans sa poche cinq pièces de monnaie :

— deux pièces ont deux côtés « pile » ;

— une pièce a deux côtés « face » ;

— deux pièces sont normales (ont chacune un côté « pile » et un côté « face »).

Les côtés « face » sont tous identiques. Les côtés « pile » sont eux aussi tous identiques. On suppose que les pièces sont équilibrées (et qu'elles ont donc la même probabilité de tomber sur chaque côté).

a) La femme ferme les yeux, prend une pièce au hasard et la lance. Quelle est la probabilité que le côté non-visible sous la pièce lancée soit « pile » ?

b) La femme ouvre les yeux et voit que la face visible de cette pièce est « pile ». Quelle est maintenant la probabilité que la face non visible de la pièce soit « pile » ?

c) Elle referme les yeux et relance la même pièce sans avoir regardé le côté non visible. Quelle est la probabilité d'avoir « pile » sur le côté non visible ?

On pourra introduire les événements suivants :
- $M = \{$la pièce lancée est double « pile »$\}$
- $N = \{$la pièce lancée est double « face »$\}$
- $R = \{$la pièce lancée est normale$\}$
- $A_{\mathrm{d}}^i = \{$au i-ème lancer le côté non visible est pile$\}$
- $A_{\mathrm{u}}^i = \{$au i-ème lancer le côté visible est pile$\}$

Solution de l'exercice 2.

a) On a $P(M) = \frac{2}{5}$, $P(N) = \frac{1}{5}$, $P(R) = \frac{2}{5}$. Ces événements forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(A_d^1) = P(A_d^1|M)P(M) + P(A_d^1|N)P(N) + P(A_d^1|R)P(R) = 1\frac{2}{5} + 0\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

b) On veut ici la probabilité de A_u^1 sachant A_d^1. On remarque que $A_u^1 \cap A_d^1 = M$, et on peut ainsi écrire :

$$P(A_u^1|A_d^1) = \frac{P(M)}{P(A_d^1)} = \frac{2}{3}.$$

c) On applique encore une fois la formule des probabilités totales (si A_d^1 est réalisé, la pièce est forcément de type M ou R. On a $P(R|A_u^1) = 1 - P(A_d^1|A_u^1) = \frac{1}{3}$. De même, $P(M|A_u^1) = P(A_d^1|A_u^1) = \frac{2}{3}$.

$$P(A_d^2|A_u^1) = P(A_d^2|R)P(R|A_u^1) + P(A_d^2|M)P(M|A_u^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Exercice 3.

a) Rappeler la fonction génératrice, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire géométrique X de paramètre $1/2$ sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = 2^{-k-1} \qquad k \geq 0.$$

b) Soit (X_n) une suite de variables i.i.d géométriques de paramètre $1/2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $G_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$G_n(t) = \left(\frac{1/2}{1 - t/2}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} 2^{-n-k} t^k.$$

On pose $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que G_n est la fonction génératrice de Y_n.

c) Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$Z_n = \frac{Y_n - n}{\sqrt{2n}}$$

Montrer que (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

d) Exprimer la quantité suivante comme la probabilité d'un événement portant sur la variable Z_n :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} 2^{-n-k}$$

e) En déduire que $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 3.

a) Par le lemme de transfert, pour $t \in [0,1]$, on a :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k-1} t^k = \frac{1/2}{1 - t/2}.$$

En dérivant la fonction génératrice, on retrouve que l'espérance et la variance de X sont 1 et 2 respectivement.

b) On a $G_n(t) = G_X(t)^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(t^{X_i}) = \mathbb{E}(t^{\sum_{i=1}^n X_i})$ par indépendance.

c) Les (X_i) sont iid et de carré intégrable. D'après le théorème central limite,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{2n}}$$

converge en loi vers une v.a. gaussienne centrée réduite.

d) $u_n = \mathbb{P}(Y_n \leq n) = \mathbb{P}(Z_n \leq 0)$.

e) D'après la convergence en loi, puisque la fonction de répartition de Z est continue,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq 0) = \mathbb{P}(Z \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$