TD II : Tests, échantillons Gaussiens, tests du χ^2

Exercice 1. *(Delmas, 2012) On distingue deux types de plantes à graines: les plantes qui disséminent leurs graines localement (type 1) et les plantes qui disséminent leurs graines très localement avec une grande probabilité et loin avec une faible probabilité (type 2). La loi de la position relative (X, Y) d'une graine par rapport à la plante est:*

- *pour le type 1, la loi uniforme sur $[-2, 2]^2$*
- *pour le type 2, la loi Gaussienne centrée réduite: (X, Y) i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$*

La graine d'une plante est observée à la position relative (x, y) par rapport à la plante. Décrire un test de vraisemblance associé.

Exercice 2. *On considère un échantillon $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et σ^2 connu. On veut tester $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$ où θ_0 est un réel fixé.*

1. *Montrer que le test $\Phi = \mathbf{1}_{\{|\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta_0)| > z_{1-\alpha/2}\sigma\}}$ est de niveau α.*
2. *Calculer la puissance de ce test.*
3. *Montrer que la puissance est décroissante sur $]-\infty, \theta_0]$ et croissante sur $[\theta_0, +\infty[$.*

Exercice 3. *Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un échantillon de variables i.i.d. de moyenne μ et de variance $\sigma^2 < \infty$ inconnus.*

1. *Rappeler l'expression d'un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ sur μ.*
2. *En déduire un test asymptotique de niveau α pour $\mathcal{H}_0 : \mu = \mu_0$ contre $\mathcal{H}_1 : \mu \neq \mu_0$.*

Exercice 4.

1. *Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ un échantillon de variables i.i.d. de Bernoulli de paramètre θ. Faire un test asymptotique de niveau α de $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta \neq \theta_0$.*
2. *(Delmas, 2012) Un juge est soupçonné de ne pas être équitable dans la sélection des jurés. En effet il y avait 15% de femmes parmi les 700 jurés qu'il avait nommés dans ses procès précédents, alors qu'il y avait 29% de femmes éligibles sur l'ensemble de la ville. Tester si le juge est impartial.*

Exercice 5. *L'efficacité d'un régime est testée sur deux groupes de 9 adultes. Le tableau ci-dessous rassemble leurs poids (en kg). On supposera que les poids suivent des lois Gaussiennes.*

Y_k^1 (sans régime)	81	89	90	95	73	83	93	64	93
Y_k^2 (avec régime)	82	75	91	85	73	78	87	60	87

1. *On souhaite établir si le poids moyen du second groupe est significativement inférieur à celui du premier. Effectuer les test nécessaires en précisant les hypothèses faites. On prendra un risque d'erreur de première espèce $\alpha = 5\%$. Peut-on conclure quant à l'efficacité du régime?*

2. *En fait, le groupe au régime n'est autre que le premier après un mois de régime, et les colonnes du tableau correspondent à une même personne. Effectuer un test approprié pour décider de l'efficacité du régime. S'il y a lieu, calculer un intervalle de confiance pour la diminution de poids procurée.*

Exercice 6. *Dans une population de 500 personnes (300 hommes et 200 femmes), on a mesuré la tension artérielle de chaque individu, ce qui a donné les effectifs suivants:*

Effectifs observés	Hypertension	Tension normale	Hypotension
Hommes	72	192	36
Femmes	38	118	44

Quel test effectuer pour savoir s'il y a une liaison entre le sexe de l'individu et sa tension artérielle?